

Тема: Властивості визначеного інтеграла. Розв'язування типових вправ

Мета:

- *Навчальна:* засвоїти властивості визначеного інтеграла; закріпити вміння розв'язувати задачі з цього тематичного блоку;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння знаходити визначений інтеграл, площу криволінійної трапеції та застосовувати отримані знання на практиці;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

Компетенції:

- *Математична компетентність:*
 - *Уміння:* оперувати числовою інформацією, розв'язувати задачі математичного змісту, інтерпретувати та оцінювати результати; прогнозувати в контексті навчальних та практичних задач
 - *Ставлення:* усвідомлення значення математики для повноцінного життя в сучасному суспільстві
 - *Навчальні ресурси:* розв'язування математичних задач;

Тип уроку: закріплення знань та вмінь;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

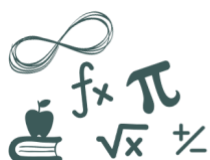
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Сформулюйте основну властивість первісної
(Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C – довільне число, то функція $y = F(x) + C$ також є первісною функції f на проміжку I .
 $y = F(x) + C$ – загальний вигляд первісних функції f на проміжку I)
- Сформулюйте теорему про інтеграл від суми функцій
 $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;
Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій)



- Що ми називаємо невизначеним інтегралом?
(Сукупність усіх первісних $y = f(x)$ на проміжку I називається невизначеним інтегралом: $\int f(x)dx$)
- Чи можна виносити сталий множник за знак невизначеного інтеграла?
(Так, сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла)
- Що ми називаємо інтегруванням функції?
(Знаходження функції за її похідною називають інтегруванням)
- Сформулюйте означення криволінійної трапеції
(Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і $y = f(x) \geq 0$, то фігура, обмежена графіком функції f і прямими $y = 0, x = a$ і $x = b$, називається **криволінійною трапецією**)
- Як можна обчислити площу криволінійної трапеції?
($S = F(b) - F(a)$, де F будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$)
- Що ми називаємо визначеним інтегралом?
Нехай F – первісна функції f на проміжку I , числа a і b ($a < b$), належать проміжку I . Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом** функції f на проміжку $[a; b]$
- Як обчислити визначений інтеграл?
 1. Знайти будь-яку первісну F функції f на проміжку $[a; b]$;
 2. Обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;
 3. Знайти різницю $F(b) - F(a)$;

Виконуючи обчислення визначених інтегралів зручно використовувати такий запис:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Що ви знаєте про формулу Ньютона-Лейбніца?
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
- Яка формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла?
$$S = \int_a^b f(x)dx$$



III. Вивчення нового матеріалу

- Властивості визначеного інтеграла

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0$$

➤ Рівність виконується для будь-якого a

Доведення:

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

Доведено.

$$2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

➤ Якщо переставити межі інтегрування то інтеграл змінює знак на протилежний

Доведення:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) \\ - \int_b^a f(x) dx &= -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a) \end{aligned} \right| \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Доведено.

$$3) \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

➤ Сталий множник можна виносити за знак інтеграла

Доведення:

$$\int_a^b kf(x) dx = kF(x) \Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k \int_a^b f(x) dx$$

Доведено.



$$4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

*Функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$ і $c \in [a; b]$

Доведення:

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= F(x) \Big|_a^c + F(x) \Big|_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Доведено.

$$5) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

➤ Інтеграл суми функцій дорівнює сумі інтегралів цих функцій

Доведення:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= (F(x) + G(x)) \Big|_a^b = (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = \\ &= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Доведено.

Аналогічно:

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Чи є функція $F(x) = \frac{1}{x^2}$ первісною функції $f(x) = -\frac{2}{x^3}$ на проміжку:

1) $(-2; 2)$

2) $(-6; 0)$

Розв'язок:

Так як $F(x)$ і $f(x)$ не визначені для $x = 0$:

1) Ні (нуль включається у проміжок);



2) Так (нуль не включається у проміжок);

№2

Знайдіть загальний вигляд первісних:

- 1) $f(x) = \sqrt{x}$ на проміжку $[1; +\infty)$
- 2) $f(x) = x^{-5}$ на проміжку $(0; +\infty)$

Розв'язок:

- 1) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
- 2) $F(x) = \frac{x^{-4}}{-4} + C$

№3

Знайдіть загальний вигляд первісних функцій:

- 1) $f(x) = \frac{6}{x} - x^3$ на проміжку $(-\infty; 0)$
- 2) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}$ на проміжку $(-\infty; 0)$

Розв'язок:

- 1) $F(x) = 6 \ln|x| - \frac{x^4}{4} + C$
- 2) $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + C - 3\frac{1}{3x^3} + C = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^3} + C$

№4

Для функції f на проміжку I знайдіть первісну F , яка задовольняє умову:

$$f(x) = (2 - 3x)^2, I = (-\infty; +\infty), F(1) = 0$$

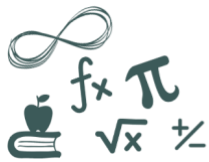
Розв'язок:

$$F(x) = \frac{(2 - 3x)^3}{3} + C$$

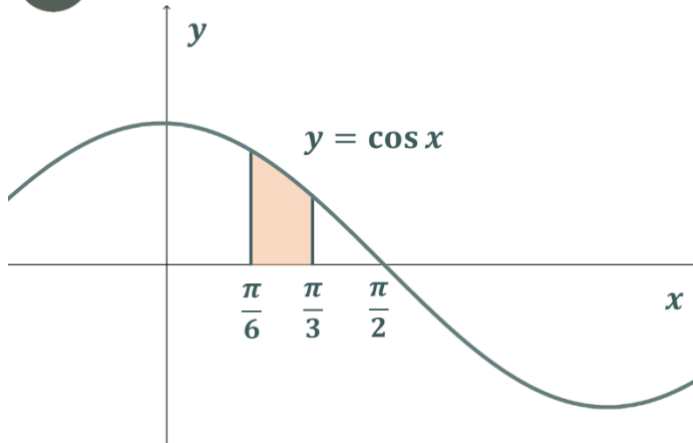
$$0 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(2 - 3 \cdot 0)^3}{3} + C \left(\begin{array}{l} \text{Якщо } F(x) - \text{первісна для } f(x), \\ \text{а } k \text{ і } b - \text{деякі сталі, причому } k \neq 0, \text{ тоді} \\ \frac{1}{k}F(kx + b) - \text{первісна для функції } f(kx + b) \end{array} \right)$$

$$C = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

$$\text{Відповідь: } F(x) = -\frac{(2-3x)^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{(3x-2)^3}{9} - \frac{1}{9}$$



Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку:



Розв'язок:

Первісна:

$$F(x) = \sin x$$

Межі інтегрування:

$$a = \frac{\pi}{6}$$
$$b = \frac{\pi}{3}$$

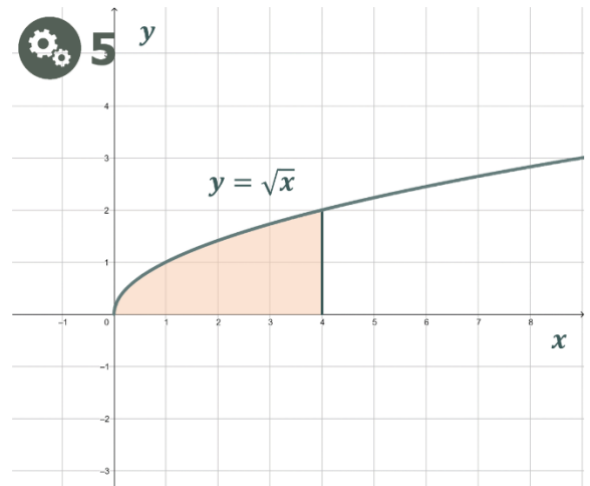
$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

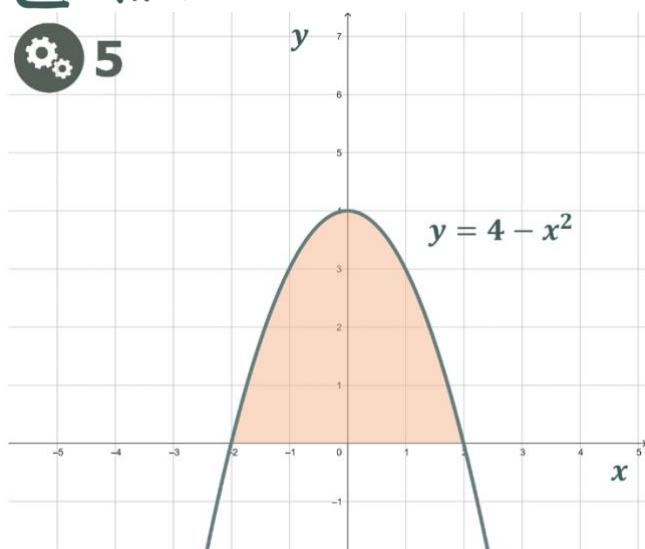
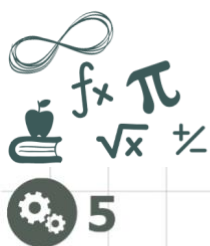
Відповідь: $S = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (кв.од)

Розв'язок:

$$S = \int_0^4 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_0^4$$
$$= \frac{2}{3} \sqrt{4^3} - \frac{2}{3} \sqrt{4^0}$$
$$= \frac{2}{3} \sqrt{64} - \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$$

Відповідь: $S = \frac{16}{3}$ (кв.од)





Розв'язок:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 \\ &= \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) \\ &= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} \\ &= 16 - \frac{16}{3} = \frac{48 - 16}{3} \\ &= \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Відповідь: $S = 10\frac{2}{3}$ (кв.од)

№6

Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx$

2) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$

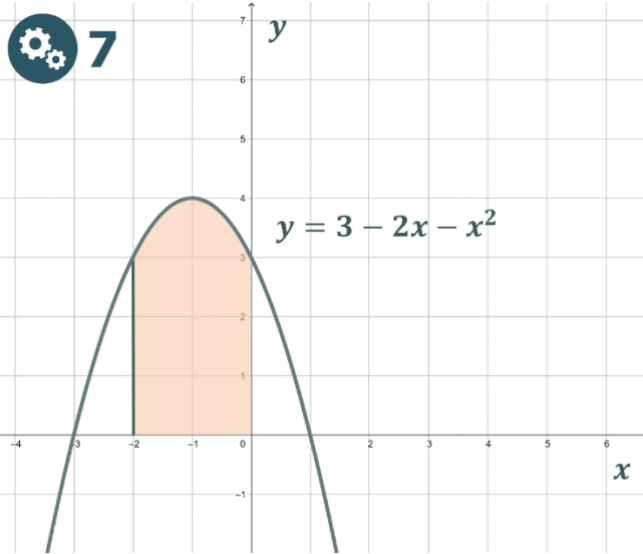
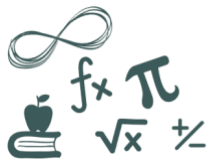
3) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$

Розв'язок:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\cos \frac{\pi}{3} - (-\cos 0) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

2) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{e^2}^{e^3} = \ln e^3 - \ln e^2 = 3 - 2 = 1$

3) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = \frac{9}{10}$



Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і прямими $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$

Розв'язок:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 (3 - 2x - x^2) dx = \left(3x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^0 \\ &= \left(3 \cdot 0 - 0^2 - \frac{0^3}{3} \right) - \left(3 \cdot (-2) - (-2)^2 - \frac{(-2)^3}{3} \right) \\ &= 0 - \left(-10 + \frac{8}{3} \right) = 10 - \frac{8}{3} = \frac{30 - 8}{3} = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Відповідь: $S = 7\frac{1}{3}$ (кв.од)

№8

Обчисліть визначений інтеграл:

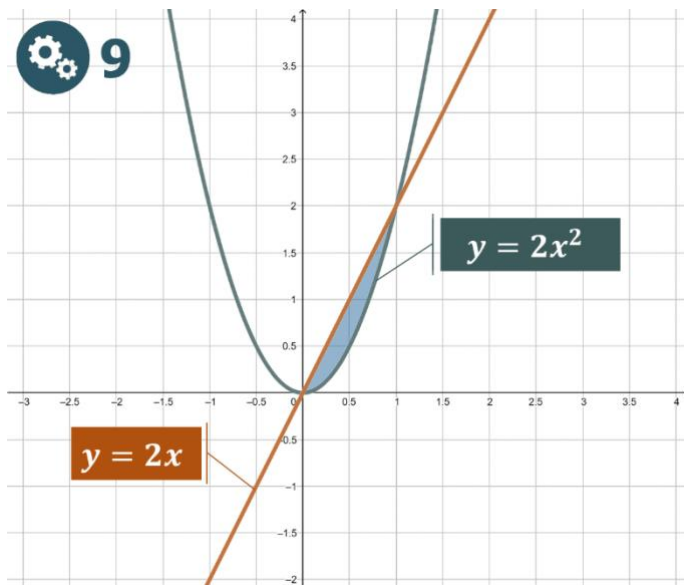
1) $\int_0^6 (3x^2 - x) dx$

2) $\int_{-2}^1 (x - 3)^2 dx$

Розв'язок:

$$1) \int_0^6 (3x^2 - x) dx = \left(\frac{3x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^6 = \left(6^3 - \frac{6^2}{2} \right) - 0 = 216 - 18 = 198$$

$$\begin{aligned} 2) \int_{-2}^1 (x - 3)^2 dx &= \frac{(x - 3)^3}{3} \Big|_{-2}^1 = \left(\frac{(1 - 3)^3}{3} \right) - \left(\frac{(-2 - 3)^3}{3} \right) = -\frac{8}{3} + \frac{125}{3} \\ &= \frac{117}{3} = 39 \end{aligned}$$



Знайдіть площу фігури,
обмеженої лініями:

1) $y = 2x^2$, $y = 2x$

Розв'язок:

Знайдемо межі інтегрування:

$$2x^2 = 2x$$

$$2x^2 - 2x = 0$$

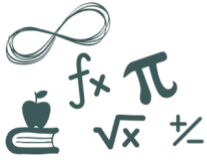
$$2x(x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

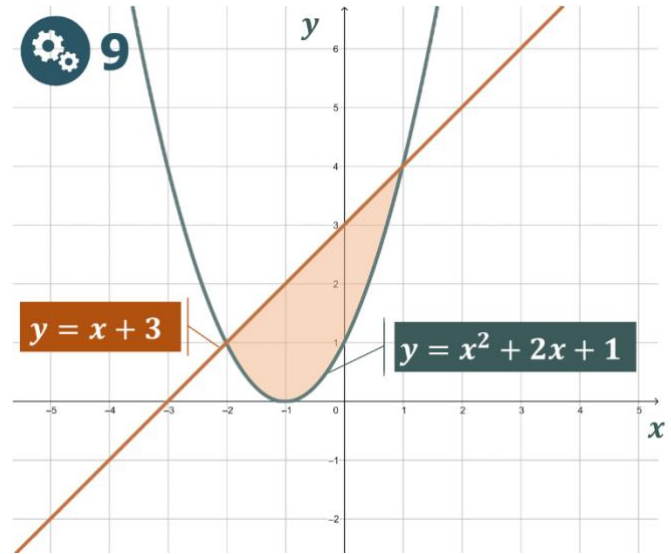
$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (2x) dx - \int_0^1 (2x^2) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \left(1^2 - \frac{2 \cdot 1^3}{3} \right) - \left(0^2 - \frac{2 \cdot 0^3}{3} \right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Відповідь: $S = \frac{1}{3}$ (кв.од)



Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

2) $y = x^2 + 2x + 1, y = x + 3$



Розв'язок:

Знайдемо межі інтегрування:

$$x^2 + 2x + 1 = x + 3$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

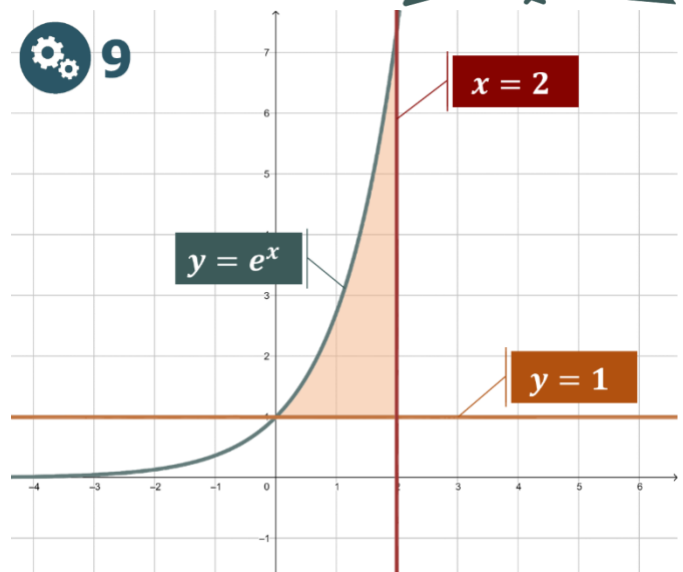
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 (x + 3) dx - \int_{-2}^1 (x^2 + 2x + 1) dx = \int_{-2}^1 (x + 3 - x^2 - 2x - 1) dx \\ &= \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 \\ &= \left(2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left(2 \cdot (-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right) \\ &= \left(2 - \frac{5}{6} \right) - \left(-6 + \frac{8}{3} \right) = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{27}{6} = 4\frac{3}{6} = 4\frac{1}{2} = 4,5 \end{aligned}$$

Відповідь: $S = 4,5$ (кв.од)



Знайдіть площу фігури,
обмеженої лініями:

3) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$

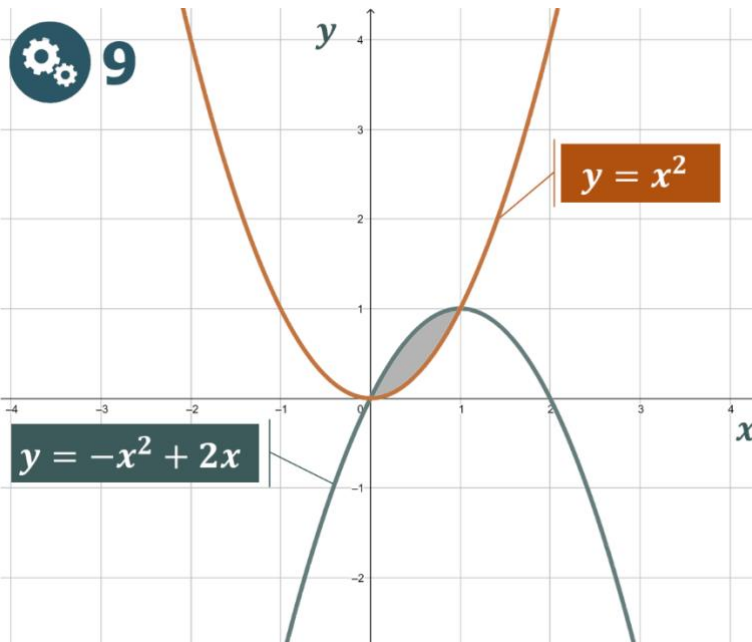


Розв'язок:

*Від площі криволінійної трапеції, утвореної графіком функції $y = e^x$, віссю Oy , віссю Ox та прямою $x = 1$ віднімо площу прямокутника утвореного віссю Oy , віссю Ox та прямими $y = 1$ і $x = 1$

$$S = \int_0^2 e^x dx - 1 \cdot 2 = e^x \Big|_0^2 - 2 = (e^2 - e^0) - 2 = e^2 - 3$$

Відповідь: $S = e^2 - 3$



Знайдіть площу фігури,
обмеженої лініями:

4) $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2$

Розв'язок:

Знайдемо межі інтегрування:
 $-x^2 + 2x = x^2$



$$2x - 2x^2 = 0$$

$$2x(1 - x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (-x^2 + 2x) dx - \int_0^1 (x^2) dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x - x^2) dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx \\ &= \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \left(1^2 - \frac{2 \cdot 1^3}{3} \right) - 0 = 1 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Відповідь: $S = \frac{1}{3}$ (кв.од)

V. Підсумок уроку

- Сформулюйте означення криволінійної трапеції
- Як можна обчислити площу криволінійної трапеції?
- Що ми називаємо визначеним інтегралом?
- Як обчислити визначений інтеграл?
- Що ви знаєте про формулу Ньютона-Лейбніца?
- Яка формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла?

VI. Домашнє завдання

Повторити §2 Виконати № 9.5 (5); 10.2 (2.4); 10.4 (4); 11.2 (б,в); 11.4 (3,4); 11.11 (3,4)	Мерзляк А.Г.
Повторити §8-10 Виконати № 11.3; 11.7; 11.11;	Істер О.С.
Повторити §6-7 Виконати № 7.1 (2,5,8); 7.2 (2,4); 7.3 (1,5); 7.4 (3,4)	Нелін Є.П.
Повторити §5-7 Виконати № 247; 256; 262; 265; 281; 287	Бевз Г.П.